Grundwissen • Klasse 9 ①

erstellt von A. Bönning

Die Menge der reellen Zahlen

Die Umkehrung des Quadrierens wird für nicht negative Zahlen als **Ziehen der Wurzel** oder **Radizieren** bezeichnet.

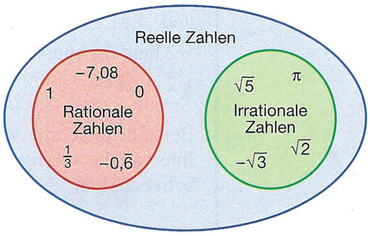
Die „Quadratwurzel aus a“ (kurz: „Wurzel aus a“) ist dabei die nicht negative Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

Wurzelzeichen → $\sqrt{a}$ ← Radikand

$x^2 = a \;\Rightarrow\; x_1 = \sqrt{a};\; x_2 = -\sqrt{a} \;\Rightarrow\; \mathbb{L} = \{\sqrt{a};\, -\sqrt{a}\}$

Es gilt: ① $\sqrt{a}^{\,2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ ② $\sqrt{0} = 0$

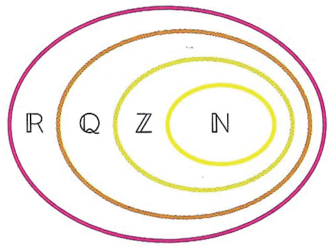
$a \in \mathbb{R}_0^+$



Zahlen, die nicht durch einen Bruch dargestellt werden können, heißen **irrationale** Zahlen. Rationale und irrationale Zahlen bilden zusammen die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Alle Grundrechenarten können in der Menge der reellen Zahlen genauso ausgeführt werden wie in der Menge der rationalen Zahlen. Alle Rechengesetze gelten auch in der Menge der reellen Zahlen.

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

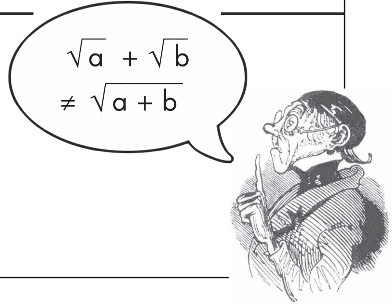


Addition und Subtraktion	Multiplikation und Division
Bei der Addition und Subtraktion in $\mathbb{R}$ lassen sich Terme mit gleichem Radikanden zusammenfassen: $a\sqrt{b} + c\sqrt{b} - d\sqrt{b} = (a + c - d)\sqrt{b}$	Für die Multiplikation und Division in $\mathbb{R}$ gilt: ① $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ ② $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
$6\sqrt{3} + 8\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$ $= (6 - 2)\sqrt{3} + (8 - 5)\sqrt{2} = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$	① $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$ ② $\sqrt{27} : \sqrt{3} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$

Beispiele

Lässt sich nur ein Faktor des Radikanden als Quadratzahl darstellen, so kann man aus diesem Faktor die Wurzel ziehen, der Rest bleibt unter der Wurzel stehen. Man spricht vom **teilweisen Radizieren**.

Beispiel: $\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 16} = \sqrt{2 \cdot 4^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4^2} = 4\sqrt{2}$



erstellt von A. Bönning

Lineare Funktionen

Wird jedem Element x der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ genau ein Wert y der Wertemenge $\mathbb{W}$ zugeordnet, so spricht man von einer Funktion. Bei einer linearen Funktion kommt die Variable x in der Funktionsgleichung in der ersten Potenz vor. Die Punkte des Graphen einer linearen Funktion liegen auf einer Geraden. Meist wird die **Funktionsgleichung** in ihrer Normalform dargestellt. Sie kann aber auch in der allgemeinen Form vorliegen.

Normalform ①	allgemeine Form ②	Beispiele ①	Beispiele ②
$y = m \cdot x + t$ m: Steigungsfaktor t: y-Achsenabschnitt	$ax + by + c = 0$ $a, b, c \in \mathbb{Q}$	$y = 2x$* $y = 0{,}5x - 3$ $y = \frac{1}{3}x + 4$	$2x - y = 0$ $0{,}5x - y - 3 = 0$ $\frac{1}{3}x - y + 4 = 0$

* Gleichung einer Ursprungsgeraden

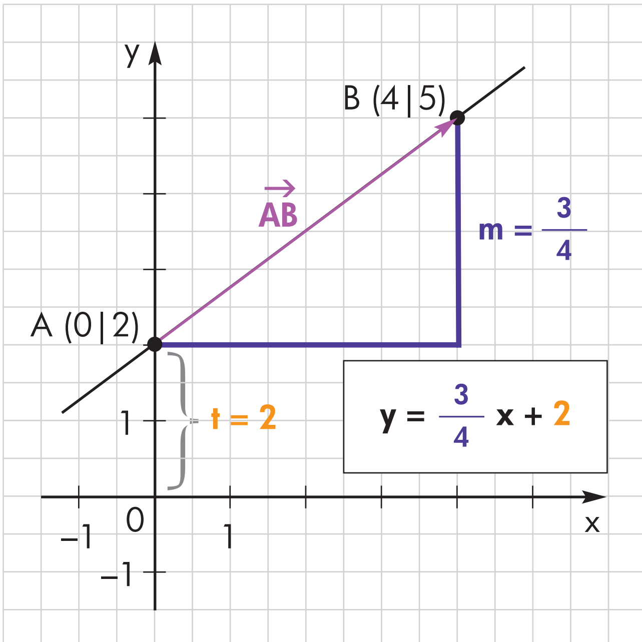
Eine Funktion ist durch den **Funktionsterm** f(x) festgelegt.
Durch Belegung der Variablen x des Funktionsterms erhält man den zugehörigen **Funktionswert**.

Beispiel: $f(x) = 4 \cdot x + 1 \;\Rightarrow\; f(3) = 4 \cdot 3 + 1 = 13$ (Lies: „Der Funktionswert an der Stelle x = 3 ist 13")

Zeichnen von Geraden

Jede Gerade ist durch ein Steigungsdreieck gekennzeichnet. Durch die Punkte A $(x_A|y_A)$ und B $(x_B|y_B)$ ist dabei der Steigungsvektor $\overrightarrow{AB}$ und die Steigung **m** festgelegt.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad (x_B \neq x_A)$$



Beispiel (s. Zeichnung)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 0 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$m = \frac{5 - 2}{4 - 0} = \frac{3}{4}$$

So kannst du den Graphen einer Funktion zeichnen:

① Markiere den y-Achsenabschnitt.
☞ hier: t = 2

② Zeichne von t aus das Steigungsdreieck.
☞ hier: $m = \frac{3}{4}$ (4 nach rechts, 3 nach oben)

③ Zeichne den Funktionsgraphen.

Geradengleichungen aufstellen

Beispiele

a) Gegeben: Punkt P $(x_P|y_P) \in g$ und y-Achsenabschnitt t

① Setze die Koordinaten des Punktes P $(x_P|y_P)$ und den y-Achsenabschnitt t in die Normalform $y_p = m \cdot x_p + t$ ein.
② Löse die Gleichung nach m auf.
③ Gib die Geradengleichung der Gerade g an.

b) Gegeben: Punkt P $(x_P|y_P) \in g$ und Steigung m

① Setze die Koordinaten des Punktes P $(x_p|y_p)$ und die Steigung m in die **Punkt-Steigungs-Form** $y = m \cdot (x - x_p) + y_p$ ein.
② Löse die Klammern der Gleichung auf.
③ Gib die Geradengleichung der Gerade g an.

Hinweis: Du kannst die Gleichung auch wie in a) beschrieben aufstellen!

c) Gegeben: Punkt A $(x_A|y_A)$ und Punkt B $(x_B|y_B)$

① Berechne mit Hilfe der Punkte A $(x_A|y_A)$ und Punkt B $(x_B|y_B)$ die Steigung m der Geraden g (siehe Seite ② unten).
② Rechne weiter wie in b) vorgegeben.

a) P (3|2); t = 3,5
$2 = m \cdot 3 + 3{,}5 \quad | -3{,}5$
⇔ $-1{,}5 = m \cdot 3 \quad | :3$
⇔ $m = -0{,}5$
⇨ g: $y = -0{,}5x + 3{,}5$

b) P (3|4); m = – 2
$y = -2 \cdot (x - 3) + 4$
$y = -2x + 6 + 4$
$y = -2x + 10$
⇨ g: $y = -2x + 10$

Zwei Geraden g und h sind **parallel**, wenn sie zwar einen unterschiedlichen y-Achsenabschnitt, aber die gleiche Steigung haben.

Beispiel: g: $y = 0{,}5 \cdot x + 3$
h: $y = 0{,}5 \cdot x - 5$
☞ $m_g = m_h$ ⇨ $g \parallel h$

Zwei Geraden g und h sind **orthogonal**, d. h. sie stehen senkrecht aufeinander, wenn das Produkt ihrer Steigungen – 1 ergibt.

Beispiel: g: $y = 0{,}5 \cdot x + 3$
h: $y = -2 \cdot x - 5$
☞ $m_g \cdot m_h = -1$ ⇨ $g \perp h$

Die Nullstelle

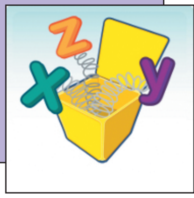
Der x-Wert, für den y = 0 gilt, heißt Nullstelle der Funktion. Im Koordinatensystem liegt der zugehörige Punkt P (x|0) auf der x-Achse. So kannst du die Nullstelle berechnen:

① Ersetze die Variable y in der Geradengleichung durch 0.
② Löse die Gleichung nach x auf.
③ Gib die Nullstelle und den zugehörigen Punkt P an.

g: $y = 5x + 10$
$0 = 5x + 10 \quad | -10$
⇔ $-10 = 5x \quad | :5$
⇔ $x = -2$
⇨ Nullstelle: $x = -2$
P (– 2|0)

erstellt von A. Bönning

Systeme linearer Gleichungen



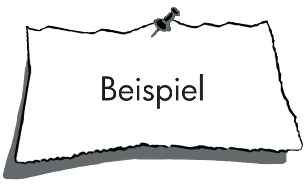
Verknüpft man zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen durch das Zeichen „$\wedge$“ („und zugleich“), so entsteht ein lineares Gleichungssystem. Löst man das System, so erhält man den Schnittpunkt der beiden zugehörigen Geraden.

① Forme die Gleichungen so um, dass eines der Lösungsverfahren angewandt werden kann.

- ☞ **Gleichsetzungsverfahren**: in beiden Gleichungen steht auf einer Seite der gleiche Term, der eine Variable enthält.
- ☞ **Einsetzungsverfahren**: eine der beiden Gleichungen ist nach einer Variablen aufgelöst.
- ☞ **Additionsverfahren**: die Koeffizienten vor einer Variablen sind bei beiden Gleichungen betragsgleich, besitzen aber unterschiedliche Vorzeichen.

② Wende das geeignete Verfahren an, so dass eine Gleichung mit einer Variablen übrig bleibt.
③ Löse die neu entstandene Gleichung nach der Variablen auf.
④ Berechne den Wert der anderen Variablen, indem du den in ③ berechneten Wert in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen einsetzt.
⑤ Gib die Lösungsmenge an. *

* Gibt es keine Lösung, sind die beiden Geraden parallel. Gibt es unendlich viele Lösungen, sind sie identisch.



$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x - 3y &=& 10 \\ \text{II} \wedge & 5x + 3y &=& 25 \end{array}$$

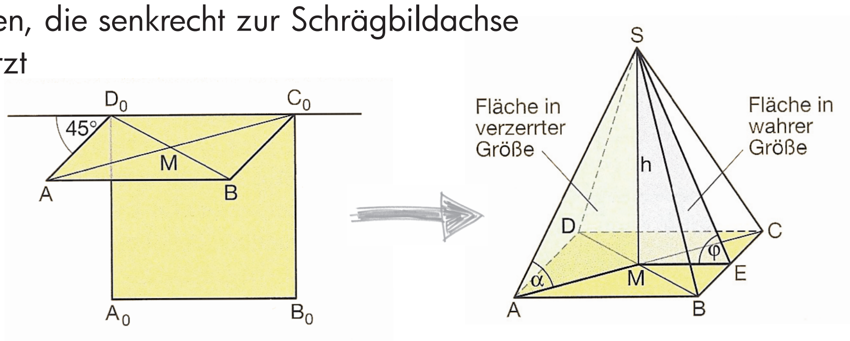
⇨ Anwendung des Additionsverfahrens

$$\begin{array}{llrcl} & \text{I + II:} & 2x - 3y + 5x + 3y &=& 10 + 25 \\ \Leftrightarrow & & x &=& 5 \\ & \text{in I:} & 2 \cdot 5 - 3y &=& 10 \\ \Leftrightarrow & & y &=& 0 \\ & & \mathbb{L} &=& \{(5\,|\,0)\} \end{array}$$

Zeichnen von Schrägbildern

Im Schrägbild erscheinen alle zur Schrägbildachse parallel verlaufenden Strecken, Flächen und Winkel in wahrer Größe. Strecken, die senkrecht zur Schrägbildachse verlaufen, werden verzerrt und verkürzt dargestellt.

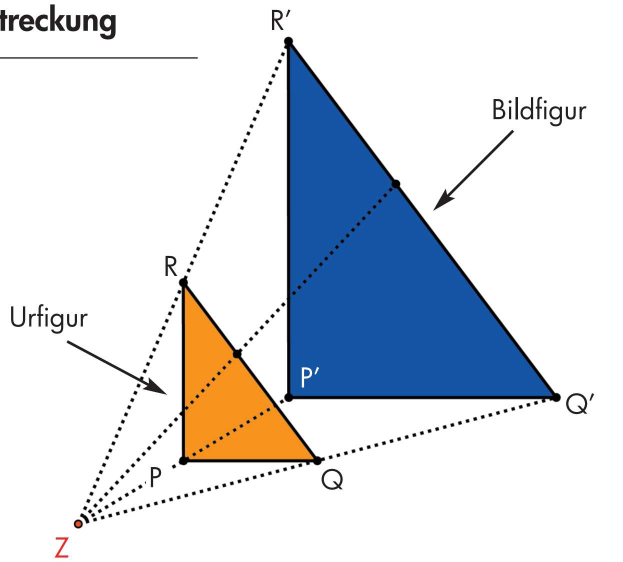
Meist gilt:
Verzerrungswinkel $\omega = 45°$
Verzerrungsmaßstab $q = 0{,}5$



Die zentrische Streckung

Eine Urfigur lässt sich durch Zentrische Streckung auf genau eine Bildfigur abbilden. Die Zentrische Streckung wird dabei durch Angabe des Streckungszentrums Z, und des Streckungsfaktors k festgelegt.

Man schreibt: $P \xmapsto{Z;\,k} P'$



Eigenschaften

- Urpunkt, Bildpunkt und Streckungszentrum liegen auf einer Geraden.
- Die Zentrische Streckung ist eine **Ähnlichkeitsabbildung** (Ur- und Bildfigur sind einander ähnlich).
- Jeder Strecke [ZP] wird eine Bildstrecke [ZP'] zugeordnet, so dass gilt: $\overline{ZP'} = |k| \cdot \overline{ZP}$
  (für $-1 < k < 1$ ist die Bildstrecke kürzer als die Urstrecke)
- Die Zentrische Streckung ist winkeltreu, geradentreu, kreistreu und verhältnistreu.
- Urfigur und Bildfigur haben den gleichen Umlaufsinn.
- Das Zentrum Z ist für $k \neq 0$ und $k \neq 1$ der einzige Fixpunkt.
- Eine Gerade durch das Streckungszentrum Z ist **Fixgerade**.
- Jede Gerade, die nicht durch Z verläuft, wird auf eine parallele Bildgerade abgebildet
- Für den Flächeninhalt der Bildfigur gilt: $A' = k^2 \cdot A$

Ähnliche Dreiecke

vgl. Kongruenzsätze
(Grundwissen Klasse 8)

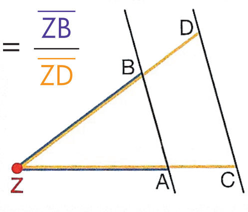
Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie

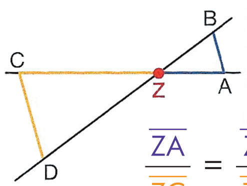
... in den Maßen zweier Winkel übereinstimmen.
... im Verhältnis der drei Seitenlängen übereinstimmen.
... im Verhältnis zweier Seitenlängen und dem Maß des Zwischenwinkels übereinstimmen.
... im Verhältnis zweier Seiten und dem Maß des Gegenwinkels der längeren Seite übereinstimmen.

Vierstreckensätze

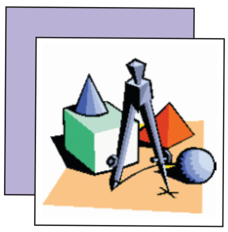
Werden zwei sich schneidende Geraden von zwei Parallelen geschnitten, ergeben sich ähnliche Dreiecke. Es gelten folgende Verhältnisse:

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZC}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZD}}$$





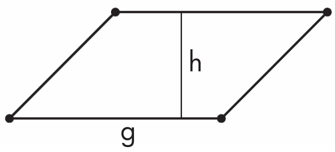
$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZC}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZD}}$$



erstellt von A. Bönning

Flächeninhalte ebener Vielecke

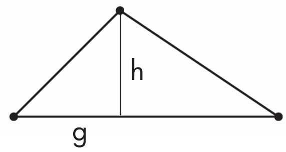
Parallelogramm



A = Grundlinie g · Höhe h*

(* zwei mögliche Höhen)

Dreieck

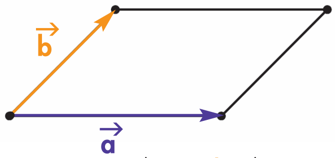


A = 0,5 · Grundlinie g · Höhe h*

(* drei mögliche Höhen)

Wird das Parallelogramm bzw. das Dreieck von den beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ aufgespannt, so kann der Flächeninhalt der Figur mit Hilfe der **Determinante** berechnet werden:

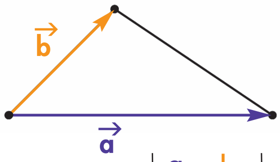
Parallelogramm



$$A = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$$

$$A = a_x b_y - a_y b_x$$

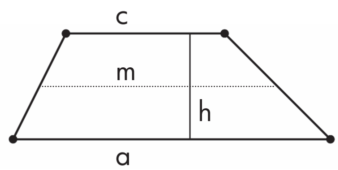
Dreieck



$$A = 0{,}5 \cdot \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$$

$$A = 0{,}5 \cdot (a_x b_y - a_y b_x)$$

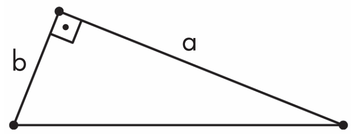
Trapez



A = Mittellinie m* · Höhe h

* m = 0,5 · (Grundlinie a + Grundlinie c)

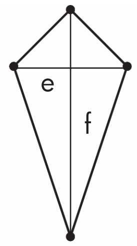
rechtwinkliges Dreieck

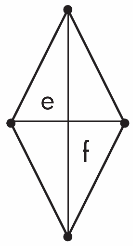


A = 0,5 • Kathete a • Kathete b

Kathete: liegt am 90°-Winkel an

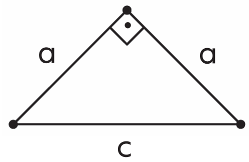
Drachenviereck Raute





A = 0,5 · Diagonale e · Diagonale f

gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck



A = 0,5 · Kathete a ^{2}

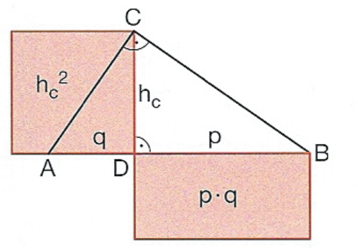
A = 0,25 · Hypothenuse c ^{2}

Hypothenuse: liegt dem 90°-Winkel gegenüber

Funktionale Abhängigkeit: Beim Berechnen von Flächeninhalten ebener Vielecke können einzelne Punkte auf einer Geraden wandern, also von einer linearen Funktion abhängig sein.

Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

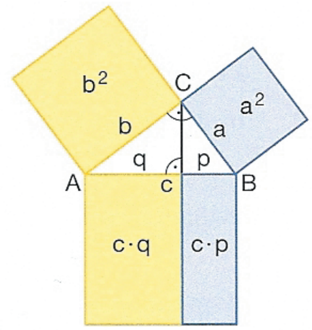
① Der Höhensatz



Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe inhaltsgleich mit dem Rechteck, dessen Seiten die beiden Hypothenusenabschnitte bilden.

$$h_c^2 = p \cdot q$$

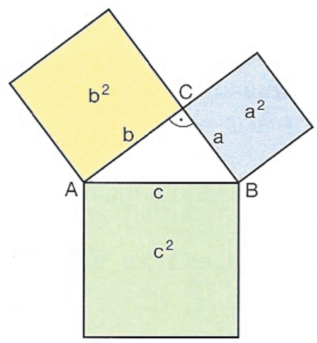
② Der Kathetensatz



Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete inhaltsgleich mit dem Rechteck, dessen Seiten die Hypothenuse und der der Kathete anliegende Hypothenusenabschnitt bilden.

$$b^2 = c \cdot q \text{ und } a^2 = c \cdot p$$

③ Der Satz des Pythagoras



Im rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Hypothenusenquadrates gleich der Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Durch Anwendung der Flächensätze erhält man folgende Formeln:

Gleichschenkliges Dreieck:
☞ c: Länge der Basis, a: Länge der Schenkel

$$h_c = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$$

Gleichseitiges Dreieck:
☞ a: Länge der Seiten

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Länge einer Strecke [AB] mit A $(x_A | y_A)$ und B $(x_B | y_B)$: $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$