Grundwissen • Klasse 8 ①

erstellt von A. Bönning

Terme

MERKE

Terme, die sich nur in den Koeffizienten (Zahlfaktoren) vor den Variablen unterscheiden, nennt man **gleichartig**. Man kann nur gleichartige Terme addieren und subtrahieren. Bei der Multiplikation werden Variablen und Koeffizienten getrennt voneinander multipliziert.

Beispiele:

① $3x + 4x^2 - 6x - 1 + 2x^2 + 3 = 4x^2 + 2x^2 + 3x - 6x - 1 + 3 = 6x^2 - 3x + 2$

② $6ac \cdot (-3)ab \cdot 2ac = 6 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot c \cdot c = -36a^3bc^2$

Klammern auflösen

+ vor der Klammer	– vor der Klammer
$a + (b + c) = a + b + c$ Die Zeichen in der Klammer ändern sich nicht!	$a - (b + c) = a - b - c$ Die Zeichen in der Klammer drehen sich um!
Beispiele	
① $2x + (-y + 8z) = 2x - y + 8z$ ② $-7a + (b - 6c) = -7a + b - 6c$	① $3x - (-4y + 5z) = 3x + 4y - 5z$ ② $-5a - (2b - c) = -5a - 2b + c$

Ausmultiplizieren

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} & -2 \cdot (-4 + 3x) \\ &= -2 \cdot (-4) + (-2) \cdot 3x \\ &= 8 - 6x \end{aligned}$$

Ausklammern/Faktorisieren

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} & -6x^2y - 3y \\ &= -3 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot y + (-3) \cdot y \cdot 1 \\ &= -3 \cdot y\,(2x^2 + 1) \end{aligned}$$

Summenterme ausmultiplizieren

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Beispiel: $(2x - 4) \cdot (3y + 6) = 2x \cdot 3y + 2x \cdot 6 - 4 \cdot 3y - 4 \cdot 6 = 6xy + 12x - 12y - 24$

erstellt von A. Bönning

quadratische Terme

Binomische Formeln

1 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Beispiel: $(x + 0{,}5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 0{,}5 + 0{,}5^2 = x^2 + x + 0{,}25$

2 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Beispiel: $(3x - 4)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 = 9x^2 - 24x + 16$

3 $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Beispiel: $\left(\frac{3}{5}y + 1\right) \cdot \left(\frac{3}{5}y - 1\right) = \left(\frac{3}{5}y\right)^2 - 1^2 = \frac{9}{25}y^2 - 1$

Extremwerte

Um das Maximum bzw. das Minimum eines quadratischen Termes bestimmen zu können, muss der Term folgende Form besitzen: $a \cdot (x - m)^2 + n$.

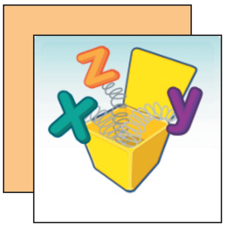
⇨ Wenn **$a > 0$** ist, hat der Term das **Minimum** **n** für $x = m$ (Schreibweise: $T_{min} = n$ für $x = m$)
⇨ Wenn **$a < 0$** ist, hat der Term das **Maximum** **n** für $x = m$ (Schreibweise: $T_{max} = n$ für $x = m$)

Falls ein Term nicht die Form $a \cdot (x - m)^2 + n$ besitzt, kann er durch **quadratische Ergänzung** umgewandelt werden. Das geschieht nach diesem Schema:

	Beispiel:	$T(x) = -2x^2 - 12x + 20$
①	Klammere den Koeffizienten des quadratischen Termes aus.	$T(x) = -2 \cdot (x^2 + 6x - 10)$
②	Stelle den linearen Term als Produkt mit dem Faktor 2 dar.	$T(x) = -2 \cdot (x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x - 10)$
	Addiere und subtrahiere das Quadrat des entstandenen Faktors.	$T(x) = -2 \cdot (x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 - 10)$
③	Wende die binomische Formel an.	$T(x) = -2 \cdot [(x + 3)^2 - 3^2 - 10]$
	Berechne den Wert des Zahlenterms.	$T(x) = -2 \cdot [(x + 3)^2 - 19]$
④	Multipliziere die eckige Klammer aus.	$T(x) = -2 \cdot (x + 3)^2 + 38$
⑤	Lies den Extremwert ab.	$T_{max} = 38$ für $x = -3$

erstellt von A. Bönning

Gleichungen und Ungleichungen



Gleichungen/Ungleichungen mit Variablen auf beiden Seiten werden so gelöst:

① Löse alle Klammern auf und fasse gleichartige Terme zusammen.
② Bringe durch Äquivalenzumformungen alle Terme mit Variablen auf die eine Seite, alle Zahlen auf die andere Seite der Gleichung/Ungleichung.
③ Teile durch den Koeffizienten vor der Variablen.
☞ Achte bei Ungleichungen auf das Inversionsgesetz!
④ Gib die Lösungsmenge an.
☞ Achte bei Ungleichungen auf die beschreibende Form der Lösungsmenge!

Beispiel

$$
\begin{aligned}
& -11x + 2(x-5) - 2 < 14 - 3(x-4) - (10-20) \\
& -11x + 2x - 10 - 2 < 14 - 3x + 12 - 10 + 20 \\
& -9x - 12 < -3x + 36 \quad |+3x \\
\Leftrightarrow \quad & -6x - 12 < 36 \quad |+12 \\
\Leftrightarrow \quad & -6x < 48 \quad |:(-6) \\
\Leftrightarrow \quad & x > -8 \\
& \mathbb{L} = \{x \mid x > -8\}
\end{aligned}
$$

Bruchterme und Bruchgleichungen

- Terme mit mindestens einer Variablen im Nenner heißen **Bruchterme**.

  Beispiele: $\frac{1}{z}$; $\frac{3-c}{c-3}$; $\frac{5}{2(a-b)}$; $\frac{6y}{4y^2-6y}$;

- Da die Division durch Null nicht definiert ist, muss immer die **Definitionsmenge** bestimmt werden.

  Beispiel: $\frac{2-x}{x+4}$ $(\mathbb{G} = \mathbb{Q})$ ⇨ $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-4\}$, da $x + 4 = 0$ für $x = -4$

- Gleichungen, die mindestens einen Bruchterm enthalten, heißen **Bruchgleichungen**.

  Beispiele: $\frac{24}{a-3} = 23$; $\frac{5}{y-7} = \frac{6}{y}$

- Man kann Bruchgleichungen durch **„über Kreuz multiplizieren"** lösen.

  Beispiel: $\frac{6}{x+2} = \frac{8}{x}$ ⇨ $6 \cdot x = 8 \cdot (x+2)$ (Hinweis: Löse ab hier wie oben beschrieben)

- Ist die Lösung der Bruchgleichung nicht in in der Definitionsmenge enthalten gilt: $\mathbb{L} = \varnothing$

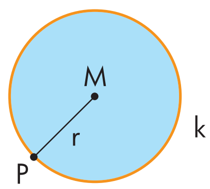
Alle Regeln für Brüche gelten auch für Bruchterme (siehe Grundwissen Klasse 6).

Grundwissen • Klasse 8 ④

erstellt von A. Bönning

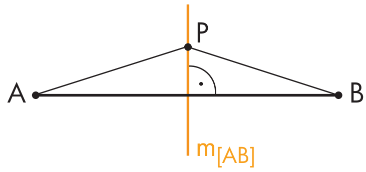
Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche

Alle Punkte P der **Kreislinie** k sind von M gleich weit entfernt.
$k = \{P \mid \overline{PM} = r\}$
Alle Punkte P des **Kreisinneren** k_i sind von M weniger als r entfernt.
$k_i = \{P \mid \overline{PM} < r\}$
Alle Punkte P des **Kreisäußeren** k_a sind von M mehr als r entfernt.
$k_a = \{P \mid \overline{PM} > r\}$



Die **Mittelsenkrechte** zur Strecke [AB] ist die Symmetrieachse dieser Strecke. Alle Punkte P auf der Mittelsenkrechten $m_{[AB]}$ sind von A und B gleich weit entfernt.

$m_{[AB]} = \{P \mid \overline{PA} = \overline{PB}\}$

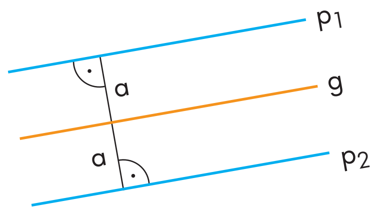


Alle Punkte P, die von einer Geraden g den gleichen Abstand a besitzen, liegen auf dem **Parallelenpaar** zur Geraden g.

$p_1 \cup p_2 = \{P \mid d\,(P;\, g) = a\}$

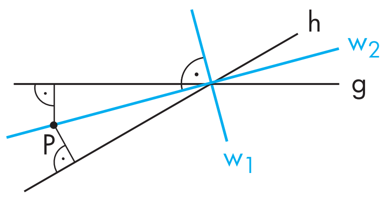
Alle Punkte P, die von zwei parallelen Geraden p_1 und p_2 den gleichen Abstand a besitzen, liegen auf der **Mittelparallelen**.

$g = \{P \mid d\,(P;\, p_1) = d\,(P;\, p_2)\}$



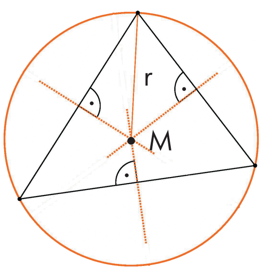
Alle Punkte P, die von zwei sich schneidenden Geraden g und h den gleichen Abstand haben, liegen auf den **Winkelhalbierenden** w_1 und w_2 der beiden Winkel zwischen den Geraden.

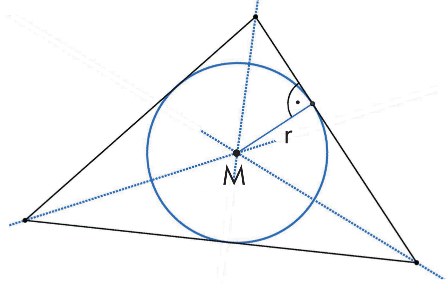
$w_1 \cup w_2 = \{P \mid d\,(P;\, g) = d\,(P;\, h)\}$



Die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten schneiden sich im Mittelpunkt M des **Umkreises**. M hat von den Eckpunkten des Dreiecks den gleichen Abstand r. Ein Viereck, das einen Umkreis besitzt, heißt **Sehnenviereck**.

Die Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt M des **Inkreises**. M hat von den Dreiecksseiten den gleichen Abstand r. Ein Viereck, das einen Inkreis besitzt, heißt **Tangentenviereck**.

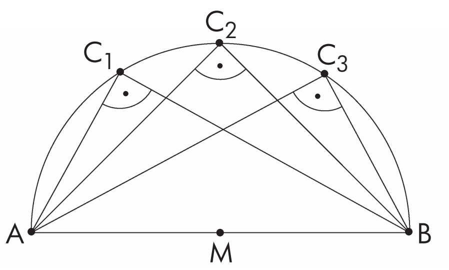




erstellt von A. Bönning

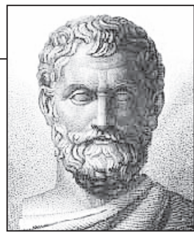
Der Kreis

Der Satz des Thales



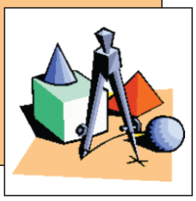
Verbindet man die Punkte C_n des Halbkreises über einer Mittelsehne mit den Endpunkten A und B, so haben die Winkel AC_nB das Maß 90°.

Umgekehrt gilt: Hat der Winkel ACB das Maß 90°, so liegt sein Scheitel C auf dem Halbkreis über der Mittelsehne [AB].



Thales von Milet um 600 v. Chr.

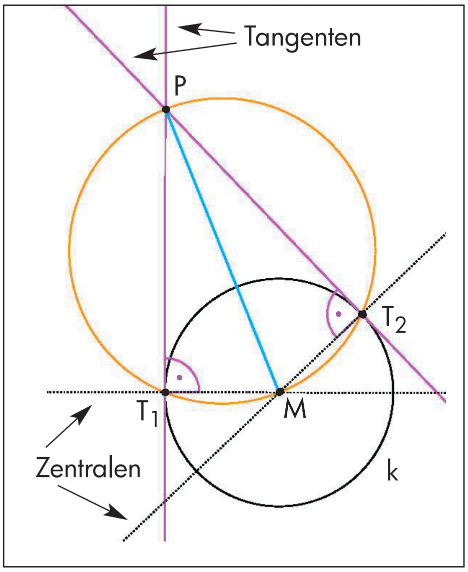
Die **Tangente** an einem Kreis steht im Berührpunkt immer senkrecht auf der Zentralen durch den Berührpunkt.



Mit Hilfe des Thaleskreises kann man die beiden Tangenten von einem Punkt P an einen Kreis k konstruieren ($P \notin k$):

① Zeichne die Strecke [MP].
② Zeichne den Thaleskreis über der Strecke [MP]. Seine Schnittpunkte mit der Kreislinie sind die Berührpunkte T_1 und T_2.
③ Zeichne die Tangenten PT_1 und PT_2. Es gilt: $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$

Hinweis: Die Strecken $[PT_1]$ und $[PT_2]$ heißen **Tangentenabschnitte**



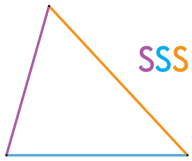
Dreiecke • Eigenschaften

Seiten-Winkel-Beziehung	In jedem Dreieck liegt der längeren Seite der größere Winkel gegenüber. (Hinweis: Auch die Umkehrung gilt) Beispiel: Wenn $a < b$ folgt $\alpha < \beta$ oder wenn $c > b$ folgt $\gamma > \beta$
Dreiecksungleichung	Die Summe zweier Seitenlängen ist größer als die Länge der dritten Seite. Beispiel: $a + b < c$ oder $a + c < b$ oder $b + c < a$
Innenwinkelsumme	Die Summe der Innenwinkelmaße beträgt 180° ($\alpha + \beta + \gamma = 180°$).

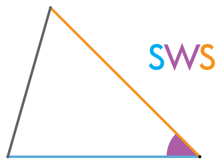
Dreiecke • Kongruenzsätze

≅ bedeutet:
… ist kongruent zu …

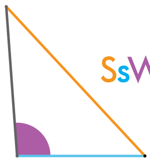
Dreiecke sind zueinander kongruent, …



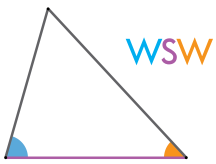
wenn sie in den Längen
ihrer drei Seiten übereinstimmen.



wenn sie in den Längen zweier Seiten
und dem Maß des Zwischenwinkels übereinstimmen.



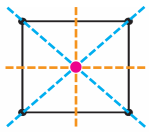
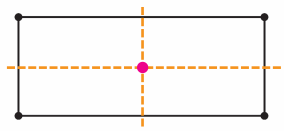
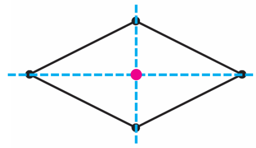
wenn sie in den Längen zweier Seiten
und dem Maß des Gegenwinkels der längeren Seite übereinstimmen.

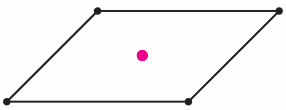
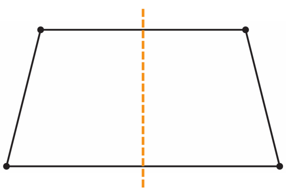
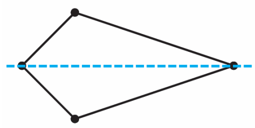


wenn sie in der Länge einer Seite
und den Maßen der beiden anliegenden Winkel übereinstimmen.
(Hinweis: Wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ kann das Maß des dritten Winkels immer berechnet werden!)

Vierecke

MERKE: Die Summe der Innenwinkelmaße im Viereck beträgt 360° ($\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$).

Punkt- **und** Achsensymmetrisch					
Quadrat		Rechteck		Raute	

Punktsymmetrisch		Achsensymmetrisch			
Parallelogramm		gleichschenkliges Trapez		Drachenviereck	

Vierecke, bei denen die Symmetrieachse auf zwei gegenüberliegenden Seiten senkrecht steht, heißen lotsymmetrisch.

Vierecke, bei denen die Symmetrieachse auf einer Diagonalen liegt, heißen diagonalsymmetrisch.

erstellt von A. Bönning

Lineare Funktionen

Wird jedem Element x der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ genau ein Wert y der Wertemenge $\mathbb{W}$ zugeordnet, so spricht man von einer Funktion. Bei einer linearen Funktion kommt die Variable x in der Funktionsgleichung in der ersten Potenz vor. Die Punkte des Graphen einer linearen Funktion liegen auf einer Geraden. Meist wird die **Funktionsgleichung** in ihrer Normalform dargestellt. Sie kann aber auch in der allgemeinen Form vorliegen.

Normalform ①	allgemeine Form ②	Beispiele ①	Beispiele ②
$y = m \cdot x + t$ m: Steigungsfaktor t: y-Achsenabschnitt	$ax + by + c = 0$ $a, b, c \in \mathbb{Q}$	$y = 2x$* $y = 0{,}5x - 3$ $y = \frac{1}{3}x + 4$	$2x - y = 0$ $0{,}5x - y - 3 = 0$ $\frac{1}{3}x - y + 4 = 0$

* Gleichung einer Ursprungsgeraden

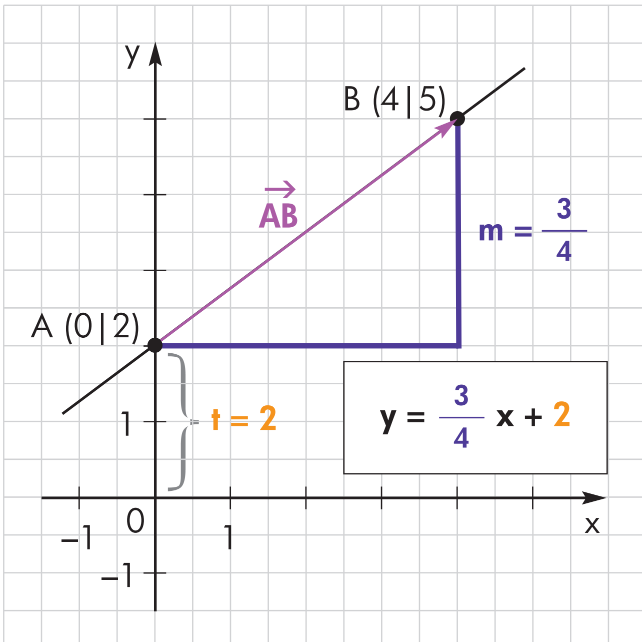
Eine Funktion ist durch den **Funktionsterm** f(x) festgelegt.
Durch Belegung der Variablen x des Funktionsterms erhält man den zugehörigen **Funktionswert**.

Beispiel: $f(x) = 4 \cdot x + 1 \;\Rightarrow\; f(3) = 4 \cdot 3 + 1 = 13$ (Lies: „Der Funktionswert an der Stelle x = 3 ist 13")

Der Steigungsfaktor m

Jede Gerade ist durch ein Steigungsdreieck gekennzeichnet. Durch die Punkte A $(x_A|y_A)$ und B $(x_B|y_B)$ ist dabei der Steigungsvektor $\overrightarrow{AB}$ und die Steigung **m** festgelegt.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad (x_B \neq x_A)$$



Beispiel (s. Zeichnung)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 0 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$m = \frac{5 - 2}{4 - 0} = \frac{3}{4}$$

So kannst du den Graphen einer Funktion zeichnen:

① Markiere den y-Achsenabschnitt.
☞ hier: t = 3

② Zeichne von t aus das Steigungsdreieck.
☞ hier: $m = \frac{3}{4}$ (4 nach rechts, 3 nach oben)

③ Zeichne den Funktionsgraphen.

erstellt von A. Bönning

Geradengleichungen aufstellen

Beispiele

a) Gegeben: Punkt P $(x_P | y_P) \in g$ und y-Achsenabschnitt t

① Setze die Koordinaten des Punktes P $(x_P | y_P)$ und den y-Achsenabschnitt t in die Normalform $y_P = m \cdot x_P + t$ ein.
② Löse die Gleichung nach m auf.
③ Gib die Geradengleichung der Gerade g an.

a) P (3 | 2); t = 3,5

$2 = m \cdot 3 + 3{,}5 \quad | -3{,}5$

⇔ $-1{,}5 = m \cdot 3 \quad | :3$

⇔ $m = -0{,}5$

⇨ g: $y = -0{,}5x + 3{,}5$

b) Gegeben: Punkt P $(x_P | y_P) \in g$ und Steigung m

① Setze die Koordinaten des Punktes P $(x_p | y_p)$ und die Steigung m in die **Punkt-Steigungs-Form** $y = m \cdot (x - x_p) + y_p$ ein.
② Löse die Klammern der Gleichung auf.
③ Gib die Geradengleichung der Gerade g an.

Hinweis: Du kannst die Gleichung auch wie in a) beschrieben aufstellen!

b) P (3 | 4); m = – 2

$y = -2 \cdot (x - 3) + 4$

$y = -2x + 6 + 4$

$y = -2x + 10$

⇨ g: $y = -2x + 10$

c) Gegeben: Punkt A $(x_A | y_A)$ und Punkt B $(x_B | y_B)$

① Berechne mit Hilfe der Punkte A $(x_A | y_A)$ und Punkt B $(x_B | y_B)$ die Steigung m der Geraden g (siehe Seite ② unten).
② Rechne weiter wie in b) vorgegeben.

Zwei Geraden g und h sind **parallel**, wenn sie zwar einen unterschiedlichen y-Achsenabschnitt, aber die gleiche Steigung haben.	Zwei Geraden g und h sind **orthogonal**, d. h. sie stehen senkrecht aufeinander, wenn das Produkt ihrer Steigungen – 1 ergibt.
Beispiel: g: $y = 0{,}5 \cdot x + 3$ h: $y = 0{,}5 \cdot x - 5$ ☞ $m_g = m_h$ ⇨ $g \parallel h$	**Beispiel**: g: $y = 0{,}5 \cdot x + 3$ h: $y = -2 \cdot x - 5$ ☞ $m_g \cdot m_h = -1$ ⇨ $g \perp h$

Die Nullstelle

Der x-Wert, für den y = 0 gilt, heißt Nullstelle der Funktion. Im Koordinatensystem liegt der zugehörige Punkt P (x | 0) auf der x-Achse. So kannst du die Nullstelle berechnen:

① Ersetze die Variable y in der Geradengleichung durch 0.
② Löse die Gleichung nach x auf.
③ Gib die Nullstelle und den zugehörigen Punkt P an.

g: $y = 5x + 10$

$0 = 5x + 10 \quad | -10$

⇔ $-10 = 5x \quad | :5$

⇔ $x = -2$

⇨ Nullstelle: $x = -2$

P (– 2 | 0)