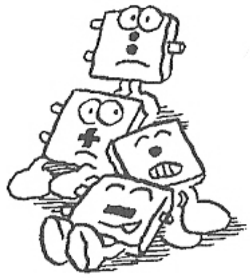
Grundwissen • Klasse 7 ①

erstellt von A. Bönning

Zahlenmengen



$\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ \ldots\}$ Die Menge der natürlichen Zahlen.

$\mathbb{Z} = \{\ldots -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ +1;\ +2;\ +3;\ \ldots\}$ Die Menge der ganzen Zahlen.

$\mathbb{Q}$ Die Menge der rationalen Zahlen.

Multiplikation und Division in $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$

Multiplikation

$+ \cdot + = +$

$+ \cdot - = -$

$- \cdot + = -$

$- \cdot - = +$

Potenzen

($a \in \mathbb{Q}_0^+$, $n \in \mathbb{N}$)

für $(-a)^n$ gilt:

$(-a)^n = a^n$, wenn n gerade ist

$(-a)^n = -a^n$, wenn n ungerade ist

Division

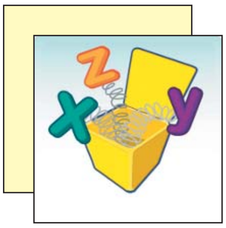
$+ : + = +$

$+ : - = -$

$- : + = -$

$- : - = +$

Gleichungen und Ungleichungen



① Die Lösungsmenge einer **Gleichung** ändert sich nicht, wenn man …

- … auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert.
- … beide Seiten mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multipliziert oder dividiert.

② Die Lösungsmenge einer **Ungleichung** ändert sich nicht, wenn man …

- … auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert.
- … beide Seiten mit der gleichen positiven Zahl ($\neq 0$) multipliziert oder dividiert.
- … beide Seiten mit der gleichen negativen Zahl ($\neq 0$) multipliziert oder dividiert und das Ungleichheitszeichen umkehrt (**Inversionsgesetz**).

Diese Umformungen einer Gleichung bzw. Ungleichung heißen **Äquivalenzumformungen**.

Beispiele

① $2x + 5 - 6x - 4 = 17$

$\Leftrightarrow\quad -4x + 1 = 17 \mid -1$

$\Leftrightarrow\quad -4x = 16 \mid : (-4)$

$\Leftrightarrow\quad x = -4$

$\mathbb{L} = \{-4\}$

② $3x - 7 - 6x - 8 > 3$

$\Leftrightarrow\quad -3x - 15 > 3 \mid +15$

$\Leftrightarrow\quad -3x > 18 \mid : (-3)$

$\Leftrightarrow\quad x < -6$

$\mathbb{L} = \{x \mid x < -6\}$

erstellt von A. Bönning

Potenzgesetze

$a, b \in \mathbb{Q}$
$m, n \in \mathbb{N}$

Potenzen mit gleichem Exponenten

Beispiel	Allgemein
$3^2 \cdot 2^2 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = (3 \cdot 2)^2$	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
$\frac{7^4}{4^4} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \left(\frac{7}{4}\right)^4$	$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (b \neq 0)$

Potenzen mit gleicher Basis

Beispiel	Allgemein
$7^4 \cdot 7^2 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7^6 = 7^{4+2}$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\frac{5^8}{5^5} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 5^{8-5}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$
$(2^2)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 2^{2 \cdot 3}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$\frac{5^3}{5^6} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^3}$ oder $\frac{5^3}{5^6} = 5^{3-6} = 5^{-3}$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad (a \neq 0)$
$\frac{6^4}{6^4} = 6^{4-4} = 6^0$ oder $\frac{6^4}{6^4} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = 1$	$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

Sehr große Zahlen und **sehr kleine Zahlen** können als Produkt einer Zahl zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz dargestellt werden. Bei sehr großen Zahlen ist der **Exponent positiv**, bei sehr kleinen Zahlen ist der **Exponent negativ**:

Beispiele

$5\,200\,000 = 5{,}2 \cdot 10^6$
$0{,}00495 = 4{,}95 \cdot 10^{-3}$

Grundwissen • Klasse 7

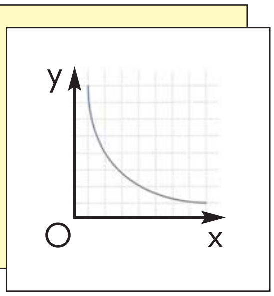
erstellt von A. Bönning

Indirekte Proportionalität

Eine Zuordnung x ⟶ y nennt man **indirekt proportional**, wenn gilt: Vervielfacht sich die Größe x um das n-fache, so teilt sich die Größe y durch n.

Eigenschaften:

- Alle Zahlenpaare (x|y) sind **produktgleich**.
- Das konstante Produkt k = y • x heißt **Proportionalitätskonstante**.
- Alle Punkte liegen auf einer **Hyperbel**.



Prozentrechnung

verminderter Grundwert / vermehrter Grundwert		
	Durch **Preisnachlass** ergibt sich aus dem ursprünglichen Grundwert ein neuer, **verminderter Grundwert**, den man auch als Prozentwert verstehen kann. ursprünglicher GW ≙ 100% **Verminderung: p%** verminderter GW ≙ 100% **– p%**	Durch **Preisaufschlag** ergibt sich aus dem ursprünglichen Grundwert ein neuer, **vermehrter Grundwert**, den man auch als Prozentwert verstehen kann. ursprünglicher GW ≙ 100% **Vermehrung: p%** verminderter GW ≙ 100% **+ p%**

Die **Zinsrechnung** ist eine Anwendung der Prozentrechnung. Unter Zinsen versteht man den Geldbetrag, den man nach einer bestimmten Zeit – in der Regel nach einem Geschäftsjahr (360 Tage = 12 • 30 Tage) – für geliehenes Geld bezahlen muss oder für verliehenes Geld bekommt.

Es entsprechen sich:

Grundwert (GW)	Prozentwert (PW)	Prozentsatz (p)
↓	↓	↓
Kapital (**K**)	Zinsen (**Z**)	Zinssatz (**p**)

Beispiel

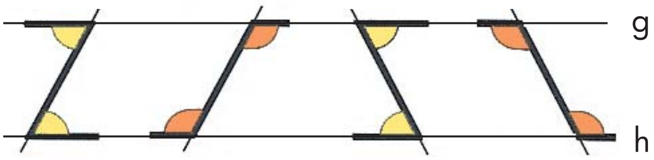
Für **940** € erhält man im Jahr **35,25** € Zinsen. Das Geld wurde mit **3,75%** verzinst.

↑	↑	↑
Kapital (**K**)	Jahreszins (**Z**)	Zinssatz (**p**)
$K = \frac{Z \cdot 100}{p}$	$Z = \frac{K \cdot p}{100}$	$p = \frac{Z \cdot 100}{K}$

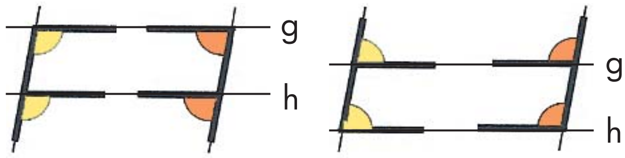
erstellt von A. Bönning

Winkel

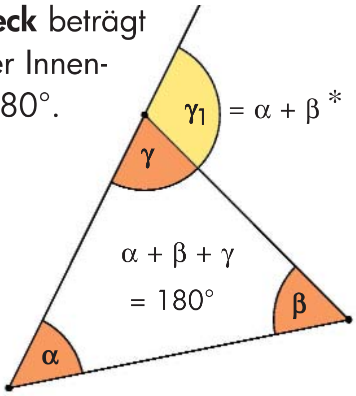
Wechselwinkel (Z-Winkel) an zwei parallelen Geraden g und h haben gleiches Maß:



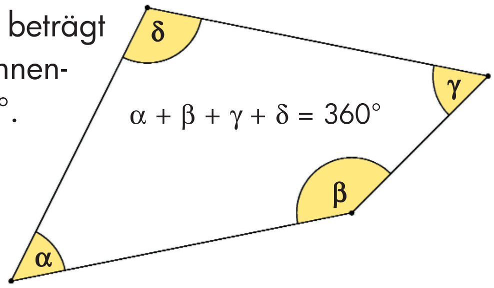
Stufenwinkel (F-Winkel) an zwei parallelen Geraden g und h haben gleiches Maß:



In jedem **Dreieck** beträgt die Summe der Innenwinkelmaße 180°.



In jedem **Viereck** beträgt die Summe der Innenwinkelmaße 360°.

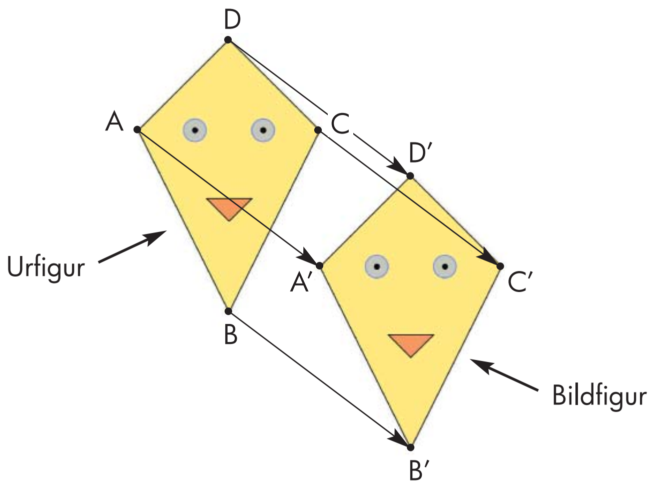


* Das Maß eines Außenwinkels ist gleich der Summe der Maße der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

Parallelverschiebung

Wird einer Urfigur durch Verschiebung mit gleich langen, parallelen und gleich gerichteten Pfeilen genau eine Bildfigur zugeordnet, so handelt es sich bei der Abbildung um eine Parallelverschiebung.

Man schreibt: $A \xmapsto{\overrightarrow{AA'}} A'$



Eigenschaften

- Alle Verbindungsstrecken vom Ur- zum Bildpunkt sind gleich lang, parallel und gleich gerichtet.
- Die Parallelverschiebung ist eine **Kongruenzabbildung** (Ur- und Bildfigur sind deckungsgleich).
- Die Parallelverschiebung ist längen- und winkeltreu, sowie geraden- und kreistreu.
- Die Parallelverschiebung besitzt **keinen Fixpunkt**.
- Eine Gerade in Verschiebungsrichtung ist **Fixgerade**.

erstellt von A. Bönning

Vektoren

Die Menge paralleler, gleich langer und gleich gerichteter Pfeile bezeichnet man als Vektor $\vec{v}$.

Man schreibt: $\vec{v} = \{\overrightarrow{AA'}; \overrightarrow{BB'}; \overrightarrow{CC'}; \overrightarrow{DD'}; \dots\}$

Jeder der Pfeile $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, … ist **Repräsentant** des Vektors $\vec{v}$.

Die Koordinaten des Pfeiles $\overrightarrow{AA'}$ und damit des Vektors $\vec{v}$ kann mit dem Fußpunkt A $(x_A | y_A)$ und der Spitze A′ $(x_{A'} | y_{A'})$ berechnet werden:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} x_A - x_{A'} \\ y_A - y_{A'} \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten eines Pfeiles mit dem Fußpunkt O $(0|0)$ stimmen mit den Koordinaten der Spitze P $(x_P | y_P)$ überein.

Einen solchen Pfeil nennt man **Ortspfeil** $\overrightarrow{OP}$.

Für den **Gegenvektor** $\vec{v}^*$ eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ gilt: $\vec{v}^* = \begin{pmatrix} -v_x \\ -v_y \end{pmatrix}$

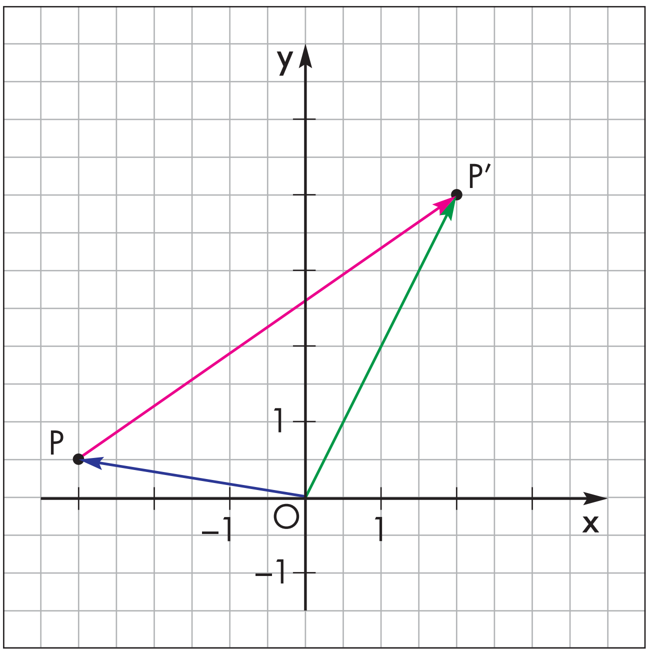
Rechnen mit Vektoren

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ gilt:

$$\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Kommutativgesetz: $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}$

Assoziativgesetz: $(\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c} = \vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c})$



Mit Hilfe von geschlossenen Pfeilketten kann man die Koordinaten von Bildpunkten berechnen:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} \oplus \overrightarrow{PP'}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 5 \\ 0{,}5 + 3{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad P'\,(2|4)$$

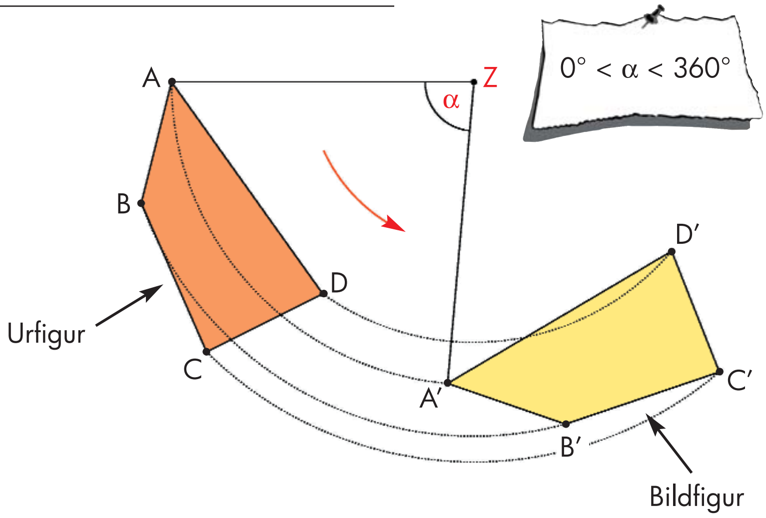
Für den Mittelpunkt M $(x_M | y_M)$ einer Strecke [AB] mit A $(x_A | y_A)$ und B $(x_B | y_B)$ gilt:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Drehung

Eine Urfigur lässt sich durch Drehung auf genau eine Bildfigur abbilden. Die Drehung wird dabei durch Angabe des Drehzentrums Z, des Drehwinkelmaßes α und der Drehrichtung festgelegt.

Man schreibt: $A \xmapsto{Z;\ \alpha} A'$

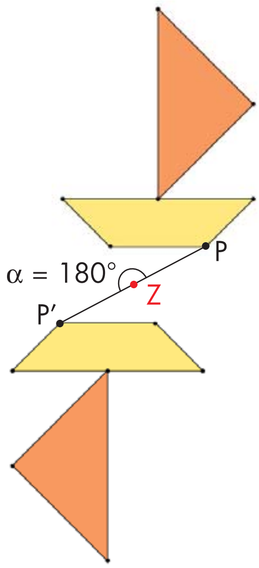


Eigenschaften

- Dreht man entgegen dem Uhrzeigersinn, so spricht man von **positiver Drehrichtung**.
- Urpunkt und Bildpunkt liegen auf einem Kreis um das Drehzentrum Z.
- Das Winkelmaß α gibt an, wie weit und in welche Richtung gedreht wird.
- Die Drehung ist eine **Kongruenzabbildung** (Ur- und Bildfigur sind deckungsgleich).
- Die Drehung ist längen- und winkeltreu, sowie geraden- und kreistreu.
- Urfigur und Bildfigur haben den gleichen Umlaufsinn.
- Das Drehzentrum Z ist der einzige **Fixpunkt**.

Drehung um 180°

- Eine Drehung um 180° heißt auch **Punktspiegelung** am Zentrum Z.
- Die Verbindungsstrecke von Urpunkt und Bildpunkt wird vom Drehzentrum Z halbiert, d. h. $\overline{PZ} = \overline{ZP'}$.
- Jede Gerade, die das Drehzentrum Z enthält, ist **Fixgerade**.
- Jede Gerade, die das Drehzentrum Z nicht enthält, wird auf eine parallele Gerade abgebildet.



Eine Figur heißt **drehsymmetrisch**, wenn sie bei einer Drehung um das Symmetriezentrum Z mit dem Winkelmaß α auf sich selbst abgebildet wird.

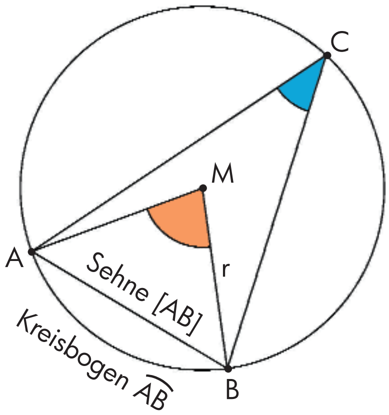
erstellt von A. Bönning

Der Kreis

Umfang eines Kreises:
$u = 2 \cdot r \cdot \pi$

Flächeninhalt eines Kreises:
$A = r^2 \cdot \pi$

Kreiszahl $\pi \approx 3{,}14$

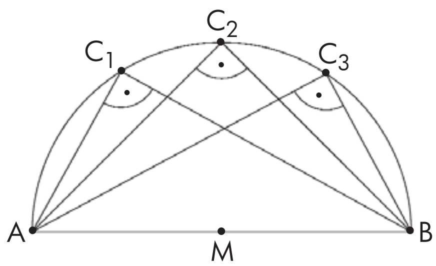


Der Winkel AMB heißt **Mittelpunktswinkel** über der Sehne [AB] bzw. dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$.

Der Winkel ACB heißt **Randwinkel** über der Sehne [AB] bzw. dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$.

Alle Randwinkel über derselben Sehne eines Kreises haben gleiches Maß. Das Maß des Mittelpunktswinkels über der Sehne eines Kreises ist immer doppelt so groß wie das Maß des Randwinkels über derselben Sehne.

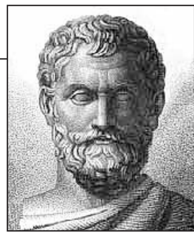
Der Satz des Thales



Verbindet man die Punkte C_n des Halbkreises über einer Mittelsehne mit den Endpunkten A und B, so haben die Winkel AC_nB das Maß 90 °.

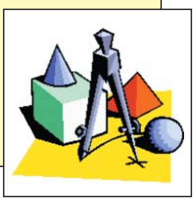
Umgekehrt gilt: Hat der Winkel ACB das Maß 90°, so liegt sein Scheitel C auf dem Halbkreis über der Mittelsehne [AB].

Thales von Milet



um 600 v. Chr.

Die **Tangente** an einem Kreis steht im Berührpunkt immer senkrecht auf der Zentralen durch den Berührpunkt.



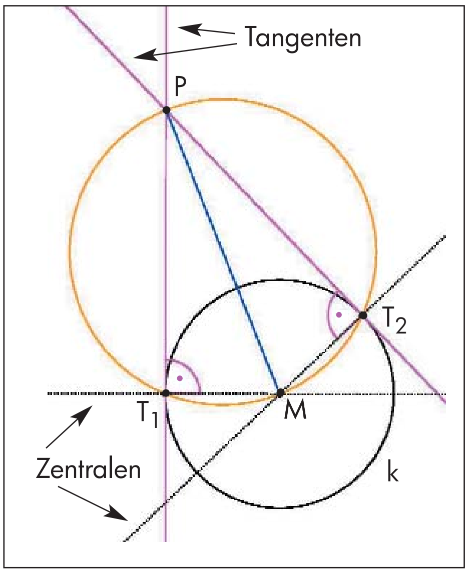
Mit Hilfe des Thaleskreises kann man die beiden Tangenten von einem Punkt P an einen Kreis k konstruieren ($P \notin k$):

① Zeichne die Strecke [MP].

② Zeichne den Thaleskreis über der Strecke [MP]. Seine Schnittpunkte mit der Kreislinie sind die Berührpunkte T_1 und T_2.

③ Zeichne die Tangenten PT_1 und PT_2.
Es gilt: $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$

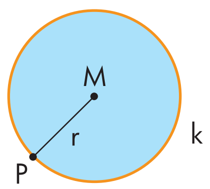
Hinweis: Die Strecken $[PT_1]$ und $[PT_2]$ heißen **Tangentenabschnitte**



erstellt von A. Bönning

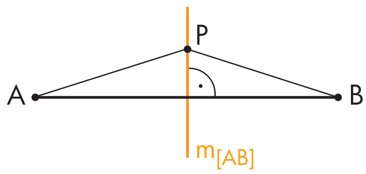
Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche

Alle Punkte P der **Kreislinie** k haben von M die Entfernung r.
$k = \{P \mid \overline{PM} = r\}$
Alle Punkte P des **Kreisinneren** k_i sind von M weniger als r entfernt.
$k_i = \{P \mid \overline{PM} < r\}$
Alle Punkte P des **Kreisäußeren** k_a sind von M mehr als r entfernt.
$k_a = \{P \mid \overline{PM} > r\}$



Die **Mittelsenkrechte** zur Strecke [AB] ist die Symmetrieachse dieser Strecke. Alle Punkte P auf der Mittelsenkrechten $m_{[AB]}$ sind von A und B gleich weit entfernt.

$m_{[AB]} = \{P \mid \overline{PA} = \overline{PB}\}$

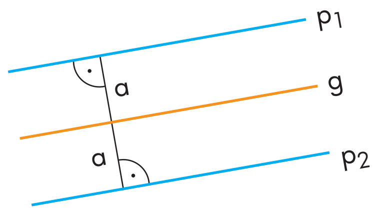


Alle Punkte P, die von einer Geraden g den gleichen Abstand a besitzen, liegen auf dem **Parallelenpaar** zur Geraden g.

$p_1 \cup p_2 = \{P \mid d\,(P;\, g) = a\}$

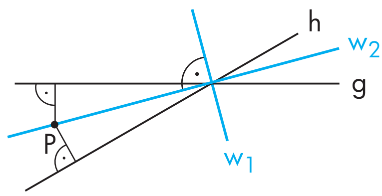
Alle Punkte P, die von zwei parallelen Geraden p_1 und p_2 den gleichen Abstand a besitzen, liegen auf der **Mittelparallelen**.

$g = \{P \mid d\,(P;\, p_1) = d\,(P;\, p_2)\}$

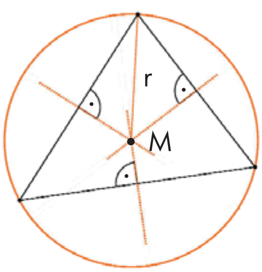


Alle Punkte P, die von zwei sich schneidenden Geraden g und h den gleichen Abstand haben, liegen auf den **Winkelhalbierenden** w_1 und w_2 der beiden Winkel zwischen den Geraden.

$w_1 \cup w_2 = \{P \mid d\,(P;\, g) = d\,(P;\, h)\}$



Die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten schneiden sich in einem Punkt M. Dieser Punkt ist Mittelpunkt des **Umkreises** des Dreiecks. Der Mittelpunkt M hat von den Eckpunkten des Dreiecks die Entfernung r.



Die Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt M. Dieser Punkt ist Mittelpunkt des **Inkreises** des Dreiecks. M hat von den Dreiecksseiten den gleichen Abstand r.